

Mediana geometrica

Giovanni Righini

2024



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

Ottimizzazione in geometria

Dato un triangolo, trovare il punto interno al triangolo che

- minimizza la massima distanza dai vertici (circocentro);
- minimizza la massima distanza dai lati (incentro);
- minimizza la somma delle distanze dai vertici (mediana geometrica);
- minimizza la somma delle distanze dai vertici e dai lati (ortocentro);
- minimizza la somma dei quadrati delle distanze dai vertici (baricentro).

I punti notevoli dei triangoli sono **soluzioni ottime** di altrettanti **problemi di ottimizzazione**.

Mediana geometrica di n punti dati

Trovare il punto del piano che minimizza la somma delle distanze da n punti dati.

Caso $n = 1$ (banale): è il punto stesso.

Caso $n = 2$ (facile): ogni punto lungo il segmento tra i due punti.

Caso $n = 3$ (problema di Fermat-Weber):

- tutti gli angoli di ampiezza inferiore a 120° : **costruzione geometrica** (Torricelli);
- un angolo di ampiezza maggiore o uguale a 120° : il vertice dell'angolo ottuso.

Caso $n = 4$:

- quadrilatero convesso: intersezione delle diagonali (disug. triang.);
- triangolo con punto interno: il punto interno (disug. triang.).

Caso $n \geq 5$: algoritmo iterativo di approssimazione (Weiszfeld, 1937).

Correttezza: garanzia di ottimalità

Correttezza. Se M , interno ad ABC vede ciascuno dei tre lati sotto un angolo di 120° , allora è la mediana geometrica del triangolo.

Dimostrazione (per analogia fisica): un nodo nel piano tirato da tre cordicelle che passano da tre buchi (i vertici), aventi ciascuna un peso (uguale per tutte) attaccato all'altra estremità.

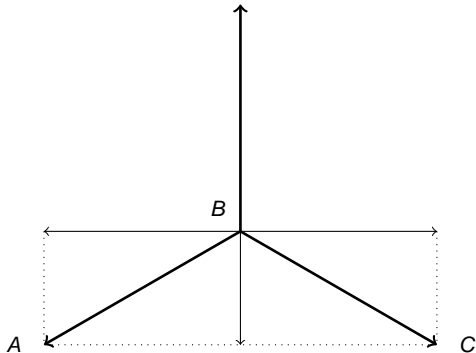
I tre vettori forza hanno **uguale modulo** e producono una forza risultante nulla quando agiscono a 120° l'uno dall'altro (somma di vettori, regola del parallelogramma).

Se $M \neq B$ è interno ad ABC , è un punto sulla circonferenza esterno ad una corda corrispondente ad un angolo al centro di 120° e quindi è anch'esso di 120° .

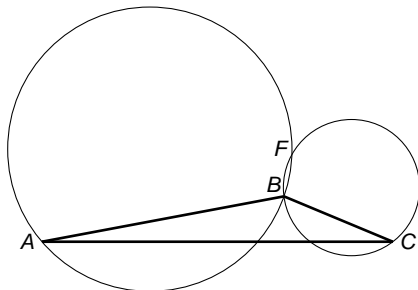
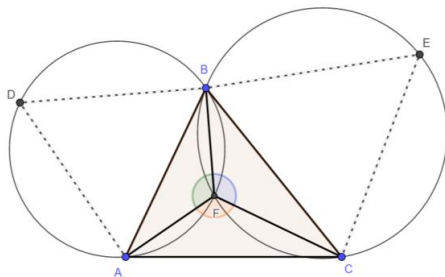
Questo vale per tutte e tre le circonferenze costruite sui tre lati (se vale per due, vale anche per la terza).

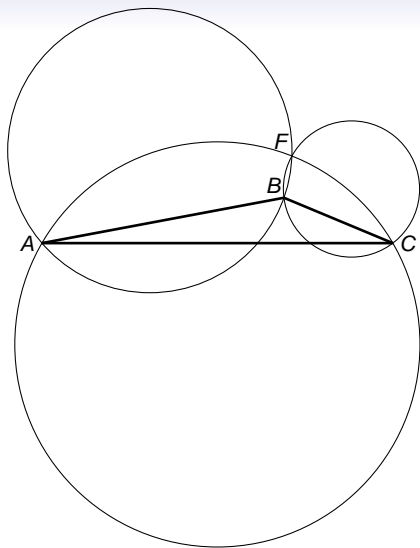
Correttezza: garanzia di ottimalità

Se invece $M = B$ (l'altra intersezione è esterna al triangolo), allora $M = B$ è la mediana geometrica.



Correttezza: garanzia di ottimalità





Perché l'algoritmo sia corretto deve lavorare sui due lati più corti.

Algoritmo di Weiszfeld

La mediana di m punti dati in n dimensioni si può approssimare iterativamente con l'algoritmo di Weiszfeld (1937).

Un punto $z \in \mathbb{R}^n$ è la mediana di $\{x_1, \dots, x_m\}$ se e solo se

$$\sum_{i=1}^m \frac{x_i - z}{\|x_i - z\|} = 0,$$

che è equivalente a

$$z = \left(\sum_{i=1}^m \frac{x_i}{\|x_i - z\|} \right) / \left(\sum_{i=1}^m \frac{1}{\|x_i - z\|} \right).$$

Iterazione dell'algoritmo:

$$z^{(k+1)} = \left(\sum_{i=1}^m \frac{x_i}{\|x_i - z^{(k)}\|} \right) / \left(\sum_{i=1}^m \frac{1}{\|x_i - z^{(k)}\|} \right).$$

Algoritmo di Weiszfeld: correttezza

La distanza da un punto dato è una funzione **convessa**.

La somma di funzioni convesse è una funzione convessa.

Una funzione convessa non ha **minimi locali** che non siano anche **minimi globali**.

Diminuendo la distanza totale ad ogni iterazione, l'algoritmo converge all'ottimo, ma in generale non garantisce di raggiungerlo esattamente. La terminazione dipende dalla precisione desiderata.

Non ha più senso studiare il **numero di iterazioni** necessarie.
Si studia invece la **velocità di convergenza**.